熱力学レポートの答え　7/6 提出分

1　1 の解答

6000 ℃と 20 ℃の二つの高温熱浴の間で働く熱機関の最大効率、すなわちこのときの CarnotCycle[*1]の熱効率を求めます。当然、CarnotCycle の熱効率は

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

となりますので[*2]、この場合の熱効率は

$$\eta = 1 - \frac{293}{6273} \quad 0.953 \quad 0.95$$

となります。

また、最大効率の太陽電池であれば $1\mathrm{m}^2$ あたり 0.953kW の出力を得られるので求める面積は

$$S = 1 * \frac{1}{0.953} \quad 1.0493 \quad 1.05\mathrm{m}^2$$

となります。

2　3 の解答

A は定圧過程なので

$$Q_A = C_p(T_2 - T_1)$$

B と D は断熱なので当然

$$Q_B = Q_D = 0$$

C は定積過程なので

$$Q_C = C_V(T_4 - T_3)$$

ここで Mayor の関係式 $C_p = C_V + R$ および比熱比の定義 $\gamma = C_p/C_V$ を用いれば C_p や C_V を用いずに γ だけで表記する事ができます。どちらでもいいと思いますが γ で書くことが多い気もします。

次は仕事です。グラフを見れば

$$W_A = p_1(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)$$

$$W_C = 0$$

[*1] CarnotCycle が最大効率になる事を Carnot の定理といいます。授業の 3-2（多分 6/8 あたりの授業）で証明した気がします
[*2] p-V グラフに CarnotCycle のグラフを書いて 1Cycle での熱の出入りと仕事を求めます

が分かります。

B は断熱線なので poisson の式 $pV^{\gamma} = \mathrm{const} = p_2 {V_2}^{\gamma}$ であるので、

$$p = p_2\left(\frac{V_2}{V}\right)^{\gamma} = \frac{RT_2}{V_2}\left(\frac{V_2}{V}\right)^{\gamma} = \frac{RT_2 {V_2}^{\gamma-1}}{V^{\gamma}}$$

とかけるので、仕事は定義より

$$\begin{aligned} W_B &= \int_{V_2}^{V_3} pdV \\ &= \int_{V_2}^{V_3} \frac{RT_2 {V_2}^{\gamma-1}}{V^{\gamma}} dV \\ &= RT_2 {V_2}^{\gamma-1} \frac{{V_3}^{1-\gamma} - {V_2}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ &= \frac{RT_2}{1-\gamma}\left[\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \end{aligned}$$

となり、poisson の式の別表現 $TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}$ を用いれば $(V_2/V_3)^{\gamma-1} = T_3/T_2$ となるので

$$W_B = \frac{R}{1-\gamma}(T_3 - T_2) = C_V(T_3 - T_2)$$

と求まります。当然ですが、この時熱の出入りが無いので内部エネルギー変化の逆符号になっている事が確認できます。D も同様に考えれば

$$W_D = C_V(T_1 - T_4)$$

となります。

3　8 の解答

授業で、エントロピーとエンタルピーの定義から

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] dp \tag{1}$$

という関係式を導きました。一方エントロピーを T と p の関数とみなしてやれば

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp$$

とかけるので、2 式を比較すると

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right) \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] \tag{3}$$

x と y の 2 変数関数 z を x で偏微分してから y で偏微分したものと、y で偏微分して x で偏微分したものは等しい[*3]ので (2) の右辺を p で偏微分したものと (3) の右辺を T で偏微分したものは等しくならなければなりませんので、求めるべき式

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V \tag{4}$$

[*3] 偏微分の定義に戻って極限の計算よやれば分かります

が導かれます。さらに (4) を (1) に代入すれば忽ち

$$dS = \frac{C_p}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$$

が導かれます。[*4]

[*4] このとき、$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ を用いました。エンタルピー変化は定圧下では気体に加えた熱量に等しくなります。(エンタルピーの定義式をよく眺めると分かると思います)。

$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ は圧力を一定に保ち温度を微小に変化させたときのエンタルピーの変化量すなわち加わった熱量ですのでこれが C_p と等しくなる事は明らかです。