Determinantの理解のために

数学Ⅱシケタイの野添です。以下の問いを解けば determinant＝行列式についておおよその基本的な理解が得られるようになっています。問2は教科書（齋藤正彦の線形代数）第3章の定理、系を問の形にしたものです。

問１　２、３次の行列式の定義式と幾何学的な意味を述べなさい。

問２　nを自然数とする。$1\le i\le n$ に対し $\mathbf{a}_i$ はn項列複素ベクトルであるとする。

$$\mathbf{a}_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

いまn個のn項列ベクトルの組 $\mathbf{a}_1,\cdots\mathbf{a}_n$ を複素数 $f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ に対応させる写像 f が次の性質を満たすとする。

性質１　n重線形性

$$f(\mathbf{a}_1,\cdots,\alpha\mathbf{a}_i+\beta\mathbf{a}'_i,\cdots\mathbf{a}_n)=\alpha f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots\mathbf{a}_n)+\beta f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}'_i,\cdots\mathbf{a}_n)$$

性質２　交代性

$$f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots\mathbf{a}_n)=-f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots\mathbf{a}_n)$$

このとき以下の問いに答えなさい。

（１）

(ア) ある $\mathbf{a}_i$ が零ベクトルならば $f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)=0$ であることを示せ。
これを用いて $f(\mathbf{a}_1,\cdots,\alpha\mathbf{a}_i,\cdots\mathbf{a}_n)=\alpha f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots\mathbf{a}_n)$ であることを示せ。

(イ) $i\neq j$ かつ $\mathbf{a}_i=\mathbf{a}_j$ ならば $f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)=0$ であることを示せ。

(ウ) $\mathbf{a}_1,\cdots\mathbf{a}_n$ が線形従属ならば $f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)=0$ であることを示せ。

（２）　２次の行列式が $f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ の１例であることを示せ。3次の場合でも同様のことを確認しなさい。

（３）

$$\mathbf{e}_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$　i番目が１でその他は０

上のように $\mathbf{e}_i$ を定める。このとき次を示せ。

$$f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots\mathbf{a}_n)=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}f(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_i,\cdots\mathbf{e}_n)$$

$f(\mathbf{e}_1,\cdots\mathbf{e}_n)=1$ であるとき $f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ をn次の行列式と定義し、$\det(\mathbf{a}_1,\cdots\mathbf{a}_n)$ と表す。この表記を用いると $f(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)=\det(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)f(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n)$ である。

$A=(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ とすればｎ次正方行列Ａに対して行列式を定めることができる。
これを det$A$ や｜A｜で表す。

（４） 正方行列 A を対称に区分けして次のように表す。

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

このとき A_{11}とA_{22} が正方行列であって $A_{12}=O$ または $A_{21}=O$ であるならば

$$|A|=|A_{11}||A_{22}|$$

となることを次の手順で示しなさい。ここで O は零行列である。

(ア) $A_{12}=O$ の場合を示せば十分である。なぜか？以下 $A_{12}=O$ とする。

(イ) A_{11}とA_{22} がそれぞれｍ次、ｎ次の正方行列であるとして、$A_{22}=E$ の場合を示しなさい。ここで E は単位行列である。

(ウ) （３）を用いて A_{22} が一般の場合を示しなさい。

（５） （４）を用いて次を示しなさい。

(ア)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(イ)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

（６） ｎ次正方行列 A の第ｉ行、第ｊ列を除いてできる n-1 次行列を A_{ij} と表す。このとき次を示せ。

$$|A|=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

（それぞれ第ｊ列、第ｉ行に関する行列式の展開と言う。）