# 数学 1A 問題演習

期末テストの範囲内で解ける問題を適当に集めてみました. 順番も適当です.

夏休みに暇な人、異様に数学が好きな人はやってみて下さい. 解答は「僕の力の及ぶ範囲で」作ってみます. 完成したらアップします. 完成する保証はありませんが.

はっきり言って、京大院数学科数学系の問題は簡単です. はっきり言って、東大院数学科の問題は難しいです.

京大院数学科数理解析系 (RIMS) の問題は東大院数学科の問題よりはるかに簡単ですが、あそこは面接でメチャクチャ落とされるらしいです. 毎年、合格者は 5 ～ 6 名です.

話がそれてすみません.RIMS にいきたいなんていう変人はいないでしょうから関係ありませんね.

僕が作った問題もありますが、軽く流すことをおすすめします.

というかそもそもこの pdf 自体、軽く流すことをおすすめします.

ちなみに京大は「関数」を「函数」と書きますが、この pdf では僕が勝手に修正しました.

$\mathbf{R}$ は実数の集合.

$\boxed{1}$

正数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が、任意の $n \geq 1$ に対し

$$\frac{x_n + x_{n+2}}{2} \leq x_{n+1}$$

をみたすならば、この数列は単調非減少であることを示せ.

(04　京大院数学科数学系)

$\boxed{2}$

$\alpha, \beta$ は正の実数とする. 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ , $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\beta}}$ の各々に対して、それが収束する $\alpha, \beta$ の範囲を求め、その理由を述べよ。

(06　京大院数学科数理解析系)

$\boxed{3}$

$n$ が十分大きい正整数であるとして

$$100^n, n^{100}, n^n, (2n)!, n!$$

を大きい順に並べ、その理由を簡単に述べよ。

(04　京大院数学科数理解析系)

$\boxed{4}$

(1) 任意の正の数 $x$ に対して、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ が収束することを示せ.

(2)$x>0$ で定義される関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ が $x=1$ において微分可能であることを示し、$f'(1)$ の値を求めよ.

(04　大阪大院数学科)

$\boxed{5}$

$\mathbf{R}_+$ を正の実数全体の集合とし、$f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ を狭義の単調増加関数とする. つまり、$x,y\in\mathbf{R}_+$ に対して、$x<y$ ならば $f(x)<f(y)$ を満たすと仮定する. このような $f$ に対して

$$d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|,\quad x,y\in\mathbf{R}_+$$

とおく.

(1)$d_f$ は $\mathbf{R}_+$ 上の距離を定めることを示せ. すなわち任意の $x,y,z\in\mathbf{R}_+$ について

(i)　$d_f(x,y)\geq 0,\ d_f(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

(ii) $d_f(x,y)=d_f(y,x)$

(iii)$d_f(x,z)+d_f(y,z)\geq d_f(x,y)$

が成り立つことを示せ.

(2) 距離 $d_f$ について $\mathbf{R}_+$ が完備であるとは、$\mathbf{R}_+$ 上の任意のコーシー列 $\{a_n\}$ がある $\alpha\in\mathbf{R}_+$ に収束する収束列であることである. ただし、ここでは距離の定義として通常の距離の代わりに $d_f$ を用いているので、コーシー列及び収束列の定義は次のようになる.

$\{a_n\}$ がコーシー列 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対し自然数 $N$ が存在して、$m\geq N,n\geq N$ ならば常に $d_f(a_m,a_n)<\varepsilon$ となる.

$\{a_n\}$ が ($\alpha$ に収束する) 収束列 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対し自然数 $N$ が存在して、$n\geq N$ ならば常に $d_f(a_n,\alpha)<\varepsilon$ となる.

距離 $d_f$ について $\mathbf{R}_+$ が完備ならば $f$ は通常の意味で連続関数であることを示せ.

(3)$f$ は連続関数とする. 距離 $d_f$ について $\mathbf{R}_+$ が完備となるための必要充分条件を $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ 及び $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ を用いて与え、その理由を述べよ.

(05　東大院数学科・注追加)

$\boxed{6}$

(1) 正の整数 $n$ に対し, 定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$ の値を求めよ.

(2)$\mathbf{R}$ 上の関数

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos\theta) d\theta$$

を $x = 0$ を中心としてテイラー展開し, その $n+1$ 次以上の項を無視して得られる多項式を $p_n(x)$ とする.$p_n(x)$ を求めよ.

(3)$K$ を $\mathbf{R}$ の有界な部分集合とする.$n \to \infty$ のとき $p_n(x)$ は $f(x)$ に $K$ 上一様収束すること、すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対し自然数 $N$ が存在して,$n \geqq N$ かつ $x \in K$ ならば常に $|p_n(x) - f(x)| < 0$ となることを示せ.

(06　東大院数学科・注追加)

$\boxed{7}$

$\lambda$ は非負実数とし、$\{a_{ij}\}_{1 \leq j \leq i \leq \infty}$ は以下の条件 $(A), (B)$ をみたす正の実数の 2 重数列とする.

$$(A) \quad \lim_{i \to \infty} \max_{1 \leq j \leq i} a_{ij} = 0$$

$$(B) \quad \lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \lambda$$

このとき、次の (i),(ii) に答えよ.

(i)$\displaystyle\overline{\lim_{i \to \infty}} \prod_{j=1}^{i} (1 + a_{ij}) \leq e^{\lambda}$ を証明せよ. ただし、$\overline{\lim}$ は上極限を表す.

(ii)$\displaystyle\lim_{i \to \infty} \prod_{j=1}^{i} (1 + a_{ij})$ が存在することを示し、その値を求めよ.

(03　京大院数学科数理解析系)

$\boxed{8}$

開区間 $(0,1)$ 上の微分可能な実数値関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が有界ならば、開区間 $(0,1)$ 内のコーシー列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ もまたコーシー列となることを示せ.$f$ が単に微分可能であればどうか?

(05　京大院数学科数学系)

$\boxed{9}$

$x$ を実変数とする関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2x^2 + 1}$ について次の問に答えよ.

(1) この級数の和を $S(x)$ とするとき、$x \neq 0$ に対して

$|S(x)| \geqq \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}|x|$ が成り立つことを示せ。

(2) この級数は、$\mathbf{R}$ 上では一様収束しないことを示せ.

(06　京大院数学科数学系)

$\boxed{10}$

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ を満たすとする. このとき、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ を示せ.

(03　京大院数学科数学系)

$\boxed{11}$

$x$ を変数とする関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+x^2}$ は $\mathbf{R}$ 上で一様収束することを示せ.

(03　京大院数学科数学系)

$\boxed{12}$

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)=1$ を満たすとき、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(02　京大院数学科数学系)

$\boxed{13}$

$f(x)$ を $x>1$ で定義された実数値 $C^1$ 級関数とする.

(1)$y \geq x > 1$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$|f(y)-f(x)| \leq \int_x^y |f'(t)|dt$$

(2) ある $A>0$ と $c>1$ が存在して $|f'(x)| \leq Ax^{-c} \quad (x>1)$ が成り立つとする.

(i)$f(x)$ は $x\to\infty$ のとき, ある実数 $\alpha$ に収束することを示せ.

(ii)(i) の $\alpha$ は次の不等式を満たすことを示せ.

$$|f(x)-\alpha| \leq \frac{A}{c-1}x^{1-c} \quad (x>1)$$

(06　大阪大院数学科)

$\boxed{14}$

実数 $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ を、$x>0$ のとき $f(x)=e-\frac{1}{x}$、$x \leqq 0$ のとき $f(x)=0$ で定義する. 以下の問いに答えよ.

(1)$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の $C^{\infty}$ 級関数であることを示せ.

(2)$n=1,2,\cdots$ とするとき、$n$ 階導関数 $f^{(n)}(x)$ に対し、$\mathbf{R}$ 上で

$$f(x)=\int_0^x p_n(x-t)f^{(n)}(t)dt \quad (*)$$

を満たす $x$ の多項式 $p_n(x)$ を求めよ.
(3)(*) を満たす多項式 $p_n(x)$ は各自然数 $n$ に対して一つに限るか、理由をつけて述べよ.
(05　東大院数学科)

$\boxed{15}$
$C^1$ 級関数 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が $g(0)=1$ をみたすと仮定し、自然数 $m \geqq 1$ に対して $f(x)=x^m g(x)$ とおく. 以下のことを示せ.
(1) 原点を含む適当な開区間 $I$ 上で定義された $C^1$ 級関数 $h$ で

$$h(x)^m=g(x), h(x)>0 \quad (x\in I)$$

をみたすものが存在する.
(2) 原点を含む適当な開区間 $J$ で定義された $C^1$ 級関数 $\varphi$ で

$$\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1, f(\varphi(y))=y^m \quad (y\in J)$$

をみたすものが存在する.
(02　大阪大院数学科)

$\boxed{16}$
$c$ を無理数とする.
(1) 自然数 $n$ に対し、$\left|\frac{p}{n}-c\right|$ を最小にするように整数 $p$ を選ぶ.
このような $p$ の選び方はただ一通りであり、$\frac{p}{n}\neq c$ であることを示せ.
(2)(1) の $p$ は $n$ によってただ一通りに定まるので、これを $p_n$ とする.
　(i) 任意の無理数 $c$ に対し、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p_n}{n}-c\right)$ は収束することを示せ.
　(ii) 任意の無理数 $c$ に対し、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p_n}{n}-c\right|$ は発散することを示せ.
(W.Hirose)

また新しいのができたらアップしてもらいます. ご意見・ご質問などはこちら:
pc: w_hirose@brown.livedoor.com
mobile: nwa4life@ezweb.ne.jp