数学II期末 2004.9.1 加藤　　解答 作成者 野添

1 行同士を引くなどして次のように変形される。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & O & & \end{pmatrix}$$

よって. $\underline{\underline{\mathrm{rank}A = 2}}$

2

(1) $$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & x & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{2倍して加える} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2x & 0 \\ -1 & 2 & x & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 2x & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{3倍して加える} = \begin{vmatrix} 0 & 2x+6 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 2x+6 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{4x+9}}$$

(2) $|\det A| = 1 \iff \underline{\underline{x = -2, -\frac{5}{2}}}$

掃き出し法によって. A^{-1}を計算する

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2x & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2x & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & x+4 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x+6 & -3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & x+4 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2x+6 & -3 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 2x+6 & 0 & 1 & 2 & x+4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4x+9 & 1 & 2 & 3 & 2x+6 \end{array}\right)$$

$x=-2$ の場合.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

よって $x=-2$のとき, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3

(1)

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -7 & -8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 & -6 & -6 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 4 & 6 & 3 \\ -4 & 8 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -7 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 18 & 13 \\ 0 & 0 & 5 & 25 & 30 & 15 \\ 0 & 16 & -5 & -25 & -30 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -7 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 18 & 13 \\ 0 & 0 & 5 & 25 & 30 & 15 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -7 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 5 & 25 & 30 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 18 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -7 & -8 & -\frac{33}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 5 & 25 & 30 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 18 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -7 & -8 & -\frac{33}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 18 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $Ax=0$ の両辺に Aを(1)で求めた形にするような行列をかけて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

まず、$x_6=0$

よって $x_1+3x_4+4x_5 = x_2 = x_3+5x_4+6x_5 = 0$

従って、s, t を任意の数として

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s+4t \\ 0 \\ 5s+6t \\ -s \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

(3) $(B|C) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

となる。もし解があれば、$0=4$ となる、これはありえないから、

解はない。

④ 線形独立

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)v_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4$$

$$= \frac{1}{4}\{(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)a_1 + (\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)a_2 + (\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3-\alpha_4)a_3 + (\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+3\alpha_4)a_4\}$$

a_1, a_2, a_3, a_4 は線形独立だから、

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0 \iff \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$$
$$= \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 - \alpha_4$$
$$= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 3\alpha_4$$
$$= 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

よって、$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

ゆえに、v_1, v_2, v_3, v_4 は線形独立.