数学II期末試験 2005.9.5 加藤教官

1 (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-1 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-1 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-1 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|}-1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 11 & 11\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{array}\right)$$

ここまで計算すると、非正則とわかるから、右側を省いて計算を進める。

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 11 & 11\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

∴ランクは3

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 6 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -2 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 6 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -6 & -6 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -11 & -5 & 0 & 6 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 5 & -5 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-3 & 0 & 6 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 12 & 15 & -15 & -12 & 0 & 3\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-3 & 0 & 0 & -5 & -5 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -19 & -8 & 4 & 3\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}-3 & 0 & 0 & 0 & 90 & 39 & -18 & -15\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -36 & -15 & 7 & 6\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 75 & 33 & -15 & -12\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -19 & -8 & 4 & 3\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & -30 & -13 & 6 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -36 & -15 & 7 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -25 & -11 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 8 & -4 & -3\end{array}\right)$$

2
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -6 & 1 & 2 & 23 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 5 & 18 & k \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 1 & 2 & 23 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 5 & 18 & k \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 14 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 21 & k-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 21 & k-2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & k-8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 & 2k-16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2k-14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -k+8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3k+24 \end{array}\right)$$

$k=8$のときに限り解が存在する。このとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - 5x_5 \\ x_3 = -2x_5 + 2 \\ x_4 = -3x_5 \end{array}$$

よって、s, tを任意の数として、一般解は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 0 & \cdots & 2-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & O & \end{pmatrix} \quad \therefore \mathrm{rank}A = 2$$

4 (1)

$$f_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 1-x$$

$$f_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^2$$

$$f_4(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = (1-x) f_3(x) = (1-x)^3$$

(2) $f_n(x) = (1-x)^{n-1} \ (n \geqq 2)$ を示す。

$n \geqq 3$ のとき、$f_n(x)$ を第1列に関して展開すると、

$$f_n(x) = 1 \cdot f_{n-1}(x) - x \cdot f_{n-1}(x) = (1-x) f_{n-1}(x)$$

以下同様にして、

$f_n(x) = (1-x)^{n-2} f_2(x)$ を得る。$f_2(x) = 1-x$ だから、

$f_n(x) = (1-x)^{n-1}$

これは $n=2$ でも成り立つから、$f_n(x) = (1-x)^{n-1} \ (n \geqq 2)$ //

5 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とおく。ただし、$i \neq j \Rightarrow b_{ij} = 0$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{ij} b_{jj}, \quad \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = b_{ii} a_{ij}$$

であるから、任意の B について $AB = BA$ ならば、

任意の i, j について、

$$a_{ij} b_{jj} = a_{ij} b_{ii} \iff a_{ij}(b_{ii} - b_{jj}) = 0$$

が成り立つ。$i \neq j$ ならば、B が任意であることより、$a_{ij} = 0$

よって、A は対角行列である。