数学 I(A)　2007 年 7 月 4 日

簡単な微分方程式 (求積法)

(59) 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = xy^2$　(2) $y' = x^{x+y}$　(3) $xy' + y = y^2$

(60) 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$　(2) $xy' = y\log y - y\log x$

(61) 次の微分方程式を解け.

(1) $y' + \dfrac{1}{x}y = x^2$　(2) $y' = e^{2x} - ye^x$

(3) $y' + y\cos x = \sin x\cos x$　(4) $2yy' = x - y^2$

2006

問題 1

$f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ (ただし $x \neq 1$) とする.

(1) $f(x)$ の n 次導関数を求めよ.

(2) 区間 $[0, x]$ (ただし $0 < x < 1$) において $f(x)$ にマクローリンの定理を適用せよ. ただし剰余項 R_n は n 次とし, R_n も求めよ.

問題 2 $\{a_n\}$ を数列とする. $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは, 「$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, m \geq N, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$」が成り立つことである.

(1) $\{a_n\}$ が収束することの定義を ε-N 論法を用いて述べよ.

(2) $\{a_n\}$ が収束するならばコーシー列であることを示せ.

(3) $\{a_n\}$ がコーシー列ならば収束することを示せ.

問題 3

(1) a を正定数とする. 極座標により $r = a(1+\cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, で表される平面内の曲線の概形を描け.

(2) (1) の曲線の長さを求めよ.

問題 4 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上定義された関数とする. 実数 $T(\neq 0)$ が $f(x+T) = f(x)$ をすべての $x \in \mathbb{R}$ についてみたすとき, T を $f(x)$ の 1 つの周期といい, このとき $f(x)$ を周期関数という.

(1) $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの定義を ε-δ 論法を用いて述べよ.

(2) $f(x)$ は周期関数とする. $f(x)$ の正の周期のうちで最小のもの (T_0 とする) が存在すれば, 他の周期は T_0 の整数倍になることを示せ.

(3) $f(x)$ が定数ではない連続な周期関数ならば, 正の周期のうちで最小のものが存在することを示せ.

試験範囲：教科書 1 〜 3 章, ただし §3.5 広義積分は除く.