2006年度夏学期「数学IB」定期試験問題　(植野義明)

2006年9月5日(火)10:50-12:20, 理科1類1組〜5組, 9組〜12組

解答上の注意　持ち込み禁止。空欄のある問題については, 空欄に当て嵌まる数または式を答えよ。すべての問題について, 途中の過程を示せ。解答用紙はひとり1枚(両面)。

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ。

(a) 核外電子の電子核はレベル1から順にK核, L核, M核と呼ばれ, それぞれに存在できる電子の個数は2個, 8個, 18個である。2次の補間多項式を用いると, レベル n の電子核に存在できる電子の個数は $\boxed{1)}$ と表わされる。もしこれが正しければ, N核に存在できる電子の個数は $\boxed{2)}$ 個である。

(b) $(5+i)^4 = 2(1+i)\times\left(\boxed{3)}\right)$ である。これより, $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{\boxed{4)}} = \boxed{5)}$ (Machinの公式, 1706) が分かる。これを利用して π の近似値を求めるには, ベキ級数展開 $\arctan x = \boxed{6)}$ を用いるとよい。

(c) $y = e^{ax}\sin(bx)$ の n 階導関数を求めよ。ただし, a, b は定数である。

(d) $x^2 - x - 1 = 0$ の正の根を連分数に展開せよ。

$\boxed{2}$ $0 < t \leq e$ とする。x 軸上の点 $\mathrm{A}(t - t\log t, 0)$ と y 軸上の点 $\mathrm{B}(0, 1 - \log t)$ がある。

(a) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は $t = \boxed{7)}$ のとき最大となり, 最大値は $\boxed{8)}$ である。

(b) 直線AB の包絡線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ $r > 0$ とする。円 $x^2 + y^2 = r^2$ の周上の点を P とし, P を通る接線と, x 軸上の点 $\mathrm{A}(1, 0)$ を通り, OP に平行な直線との交点を Q とする。ただし, $\mathrm{O}(0, 0)$ は原点である。

(a) P の座標を $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とするとき, Q の座標を求めよ。

(b) P が円周を1回転するとき, 点 Q が描く曲線の長さ ℓ は $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\boxed{9)}}\, d\theta$ と表わされる。

(c) $r = 1$ のとき, ℓ の値を求めよ。

(d) $r \to 0$ のとき, ℓ は極限値 $\boxed{10)}$ に近づく。

$\boxed{4}$ $y = e^{-x^2} = \exp(-x^2)$ のグラフについて, 以下の問に答えよ。

(a) 変曲点の座標を求めよ。

(b) グラフと x 軸とで挟まれた, x 座標が x から $x + \Delta x$ までの部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を (Δx について2次以上の項は無視して) 求めよ。ただし, $x > 0$, $\Delta x > 0$ とする。

(c) グラフと x 軸とで挟まれた, $0 \leq x \leq r$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(d) $r \to \infty$ のとき, $V \to \boxed{11)}$ である。