数学Ⅱ演習第１回（４月２３日）　略解（訂正版）

５を修正（2007.6.6）

１．省略

２．$\begin{pmatrix} -7/9 \\ 7/18 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

３．-1　$A' = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 3/10 & 1/10 \end{pmatrix}, B' = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

但し $ad-bc=0$ のとき B´は存在しない。

-2　$a_1=-5$，$a_2=10$．$a=d$，$b=c=0$ のとき b_1，b_2 は $a^2+ab_1+b_2=0$ を満たす任意の実数。それ以外の場合 $b_1=-a-d$，$b_2=ad-bc$

４．-1　帰納法で示す。k＝1は条件そのもの。ある自然数kで $A^kB^k=B^kA^k$ ならば、

$A^{k+1}B^{k+1}=A(A^kB^k)B=A(B^kA^k)B=(AB)B^{k-1}A^{k-1}(AB)=(BA)B^{k-1}A^{k-1}(BA)=\cdots=B^k(AB)A^k=B^k(BA)A^k=B^{k+1}A^{k+1}$

以下略。

-2　$A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ が１つの例である。実際

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

となるから正しい。

５．A^k の (i,j) 成分を $a_{ij}^{(k)}$ と表す。ある k(=1,2,⋯,n－1)で $i \geq j-k+1$ のとき $a_{ij}^{(k)}=0$ と仮定する。$i \geq j-k$ のとき $1 \leq l \leq j-1$ では、$i \geq l-k+1$ となるから（各自確かめよ）$a_{il}^{(k)}=0$ である。よって $i \geq j-k$ のとき

$$a_{ij}^{(k+1)}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)}a_{lj}=\sum_{l=1}^{j-1} a_{il}^{(k)}a_{lj}+\sum_{l=j}^{n} a_{il}^{(k)}a_{lj}=0$$

となる。k＝1の場合は条件そのものであるから、すべての k(=1,2,⋯,n)で $i \geq j-k+1$ のとき $a_{ij}^{(k)}=0$ が成り立つ。k＝n ではすべての成分が０になることがわかる。

６－１　$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

６－２　$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

６－３　置換行列は単位行列の行を適当に入れ替えたもの（だから n 次の置換行列は n!個ある)。よって I を単位行列、E_1、E_2 を適当な基本行列の積として（行列はすべて n 次正方行列）A＝E_1I、B=E_2I と表せる。AB =E_1I・E_2I= E_1E_2I は明らかに置換行列である。