数学Ⅱ演習第３回（５月２８日）　略解（訂正版）

誤植を訂正しました。１，２に解説追加。２の答えを訂正。５－２，３を第４回にまわし、内容を若干変更。7 の解答を修正。１５の略解を掲載 (2007.6.5) 4 を修正。(6.6)

１．答え：$\mathrm{rank}A = \begin{cases} n \ (n\text{が奇数}) \\ n-1 \ (n\text{が偶数}) \end{cases}$

n が奇数のときは A のすべての行ベクトルが互いに１次独立であることを言えばよい。n が偶数のときは n 本の行ベクトルでは１次従属だが、第 n 行を抜かした n-1 本のベクトルは１次独立であることを言えばよい。

２．答え：A^{-1}の(i,j)成分をb_{ij}とすると$\mathrm{b}_{ij} = \begin{cases} 0, (\, i > j) \\ (-1)^{j-i},\ (i \le j) \end{cases}$

A と I を並べ、まず第 n-1 行から第 n 行を引き、次に第 n-2 行から第 n-1 行を引く。以降同様の操作を繰り返すと A は I になり I は A^{-1} になる。証明としては、答えを最初に示してから A との積が I になることを言ってもよい。

３．-1　上三角行列＝対角線より左下にある成分がすべて０である正方行列

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ 0 & \mathrm{a}_{22} & & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}$$

を考える。i 行目の行ベクトルを $\mathbf{V}_\mathrm{i}$ とすると、

A が正則⇔$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \alpha_\mathrm{i} \mathbf{V}_\mathbf{i} = \mathbf{0}$がすべての$\alpha_\mathrm{i}$が 0 であるときに限り成立

$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \alpha_\mathrm{i} \mathbf{V}_\mathbf{i}$の（1,j）成分は$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{j}} \alpha_\mathrm{i} \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}$であるから、$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{j}} \alpha_\mathrm{i} \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} = 0(\mathrm{j} = 1,2,\dots,\mathrm{n}) \Leftrightarrow \alpha_\mathrm{i} = 0(\mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{n})$であることより ｊ＝１から順番に見ていけば$\alpha_{\mathrm{ii}}$=0(i=1,2,⋯,n)を得る。

（対角成分が一つでも 0 なら掃き出しができなくなることを言ってもよい。）

-2　（A｜I）（A は上三角行列、I は単位行列）を掃き出して（I｜A^{-1}）にすることを考える。まず、第ｎ行を$-\mathrm{a}_{\mathrm{kn}}/\mathrm{a}_{\mathrm{nn}}$ 倍して第 k 行に加える（k=1,2,⋯,n-1）。同様の操作を繰り返す。つまり第m行（m=n,n-1,⋯,2,1）を$-\mathrm{a}_{\mathrm{km}}/\mathrm{a}_{\mathrm{mm}}$倍して第 k 行（ｋは１からｎの中でm以外の自然数）に加えるという操作を下の行から順々に行う。最後に第 k 行を a_{kk} で割る（ｋ＝1,2,⋯,n)。この操作の過程で明らかに対角線の左下側は０のままである。

４．$(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ の左辺を展開して、$\mathbf{v}\times\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{w}\times\mathbf{u}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ を得る。

$(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ からも同様に $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ を得る。

５．-1　定義より $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\sin\theta = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$

－２，３は第４回２を見よ。

６．成分計算すればよい。答えは順に

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & e\end{pmatrix},a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

７． $B=(b_{ij})$ をｎ次正方行列とする。 $AB=(c_{ij}), BA=(d_{ij})$ とおく。

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = b_{i+1,j}(1\le i\le n-1, 1\le j\le n), c_{nj}=0$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = b_{i,j-1}(1\le i\le n, 2\le j\le n), d_{i1}=0$$

$c_{ij}=d_{ij}$ より、

$$b_{i+1,j} = b_{i,j-1}, b_{n,j-1} = b_{i+1,1} = 0(1\le i\le n-1, 2\le j\le n)$$

８．基本変形（行の入れ替え）を繰り返すことによって（A｜I）→（I｜A^{-1}）とできる。
A^{-1}の（i,j）成分を b_{ij} とすると、$b_{1n}=b_{j,j-1}=1$（$2\le j\le n$）,それ以外の成分は０。

９．証明略。$D^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & C^{-1}\end{pmatrix}$

１０．　I－A と A とは可換であるから、

$$I = \{(I-A)+A\}^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(I-A)^k A^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(I-A)^k A^{n-k} = (I-A)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(I-A)^{k-1}A^{n-k}$$

よって

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(I-A)^{k-1}A^{n-k}$$

１１．　第４回４－２を見よ

１２．　省略

１３．　第４回６を見よ

１４．　省略

１５．　教科書Ｐ２８，２９を見よ。答えは$2\sqrt{21}/7$。

１６．　第４回７を見よ

１７．　０でない対角成分を持つｓ個の行ベクトルは１次独立だからランクは少なくともｓ。等号が成立しない例を挙げる。ここでｒ＝３、ｓ＝１となっている。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$