数学Ⅱ演習第４回（６月４日）　略解

１２の解答を載せました。以下では授業で扱っていない問題の解答も載せています。今回は完全に解答を示していないものが多いです。わからないところは質問してください。（2007.6.8）

１．　第３回３－２を見よ。

２．　各ベクトルを成分表示し、計算する。教科書第１章問題１０の問題及び答えを参照せよ。扱う文字を減らすための工夫をせよ。

３．　第３回７を見よ

４．　－１　前半は成分比較。後半は前半を利用する。記号の意味については教科書Ｐ３７を見よ。

－２　Ａが正則ならＡ$^{-1}$が存在することから

$$ {}^t\left(A^{-1}\right){}^tA = {}^t\left(AA^{-1}\right) = {}^tI = I $$

となって、^{t}A の逆行列が存在して ^{t}A は正則である。随伴行列についても同様。

５．　３次正方行列の場合次のように分解できる。一意性を確かめ、ｎ次に一般化せよ。

$$ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} \\ a_{21}+a_{12} & 2a_{22} & a_{23}+a_{32} \\ a_{31}+a_{13} & a_{32}+a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} & a_{13}-a_{31} \\ a_{21}-a_{12} & 0 & a_{23}-a_{32} \\ a_{31}-a_{13} & a_{32}-a_{23} & 0 \end{pmatrix} $$

６．　答えは以下の形で書ける。

$$ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}\sin\theta $$

答えの作り方

①空間ベクトル(2,-1,0)が(1,2,3)と垂直であることを見抜く。

②(2,－1,0)×(1,2,3)＝(3,6,－5)であることより、(1,2,3)に垂直で互いに直交する２つの単位ベクトルが求まる。それぞれに cos θ と sin θ をかけて足せば上の答えを得る。

７．平行移動して(0,0,0)、(X_1,Y_1,Z_1)、(X_2,Y_2,Z_2)の３点を通る平面の方程式を考える。

解１：これはパラメータ s,t を用いて次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

パラメータを消去して整理すると、

$$(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)X + (Z_1X_2 - Z_2X_1)Y + (X_1Y_2 - X_2Y_1)Z = 0$$

解２：一般に空間ベクトル $\mathbf{n}$ に垂直で点 A($\mathbf{a}$)を通る平面の方程式は、

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{a}) = 0\text{、ただし}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で与えられる。ここでは $\mathbf{n}$ は平面を張る二つのベクトルの外積として与えられるから、平面の方程式はつぎのようになる。

$$\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

本問の答えは

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

を代入すれば得られる。

８． 第３回１７を見よ。

９． まず 9-2 から示し、それを使って 9-1 を示す。

9-2 の証明

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{tr}(BA)$$

9-1 の証明

$$\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(B^{-1}(AB)) = \mathrm{tr}((AB)B^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$$

１０． $\mathbf{v}_i$ は列ベクトルとし n 次正方行列 V=($\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_n$)を定める。$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n$ が一次独立⇔V が正則。このとき A が正則ならば AV も正則である。逆に AV が正則なら A も正則である。このことを各自確かめよ。(正則とは逆行列が存在する、ということであるから、

逆行列の存在を言えばよい。）

１１．ここではベクトルで点を表すものとする。$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i + t_i \mathbf{d}_i \, (i = 1,2,3)$ とおくと（以下でΣの和をとる範囲（1≤i≤3）は省略してある）

$$\sum \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{a}_i + \sum t_i \mathbf{d}_i = \sum \mathbf{a}_i + \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = D\boldsymbol{\tau}$$

ただし

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} = D, \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\tau}$$

とした。空間内の任意の点 $\mathbf{v}$ に対し $\sum \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$ の解 $\boldsymbol{\tau}$ が常に存在するための必要十分条件は D が正則であることすなわち３つの方向ベクトルが互いに一次独立であることである。

１２．$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = 0$

任意の b_{ij} について上の式が成り立つならば、すべての a_{ij} は０である。つまり A は零行列。

１３．省略

１４．交線は両平面の法線に垂直だから、両平面の法線ベクトルの外積が交線の１つの方向ベクトル。

１５．ベクトル $\mathbf{a}$ を x 軸上におき、ベクトル $\mathbf{b}$ を z 軸上におく。ベクトル $\mathbf{x}$ が描く奇跡は、以下であらわされる直線である。（実際に図示してみよ）

$$y = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}, z = 0$$

１６．階数は、a=1 のとき１、a=0 のとき３、a が 0 でも 1 でもないとき４。
うまく基本変形してあげることがポイント。

１７．17-1 は容易。17-2 は成分比較。17-3 は 17-1 と 17-2 を利用する。
すなわち Ax=0⇔(Ax・Ax)＝0、(Ax・Ax)＝(x・${}^{t}A$Ax)から示される。