数学 II 冬学期最終試験（川又教授）2008 年 2 月 12 日実施

問題とヒント

作成者：数 II シケ対 野添嵩

問題篇

1. 対角成分がすべて等しい三角行列は，はじめから対角行列である場合を除いて，正則行列によって対角化できないことを証明せよ．

2. 固有方程式が重根を持たず，しかもすべての根が実数であるような実正方行列は，実正則行列によって対角化可能であることを証明せよ．

3. n 次正方行列 A, B において $AB = O$ であるならば，$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) \leq n$ であることを証明せよ．

4. ユニタリ行列の固有値の絶対値は 1 であることを証明せよ．

5. 二次形式 $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy + 6yz + 4zx$ を直交行列を使って標準形に直せ．

ヒント編

1. この問題に答えるために,「三角行列の固有値はその対角成分に等しい」こと,「正則行列によって対角化できる」とはどういうことかを確認しておきましょう。
   「三角行列の固有値はその対角成分に等しい」ことから,対角成分がすべて等しい三角行列が対角化可能だとしたら,どんな形になるのかがわかります.すると対角化される前の行列がどんな形でなければならないかがわかります.

2. 固有方程式とは何か確認しておいてください.
   固有方程式が重根をもたないことと,根が実数であることから,固有値が相異なる実数であることがわかります.実正方行列を対角化するような実正則行列の存在を示すことが証明の柱です.したがって,まず各固有値に属する固有ベクトルとして実数成分の数ベクトルが取れることを示し,次に異なる固有値に属する固有ベクトルが線形独立であることを示し,最後にそれらを並べた行列で対角化できることを示せばよいわけです.

3. 核空間,像空間,次元,階数,次元定理など線型空間・写像の用語の確認をしておきましょう.
   なおこの問いで rk とは rank のことです.
   $AB=O$ を線型写像の言葉でどのように解釈できるかを考えましょう. A,B は n 次元数ベクトル空間から自身への線型写像で AB は B で写してから A で写すという合成写像と考えることができます.すると,$AB=O$ は B の像空間に含まれる元はすべて A によって零に写されるということを意味します. まずこのことを納得できるまで考えてください.そしてそのことを核空間という言葉を使って言い換えてみましょう.

それができれば後は $n=\dim \mathrm{Ker}A+\mathrm{rank}A$ を用いることで不等式が示すことができます.

4. ユニタリ行列の定義(どういう性質をもって特徴づけられるか)を確認してください.
   照明の仕方はたいていの線型代数の教科書・演習書にのっていると思いますので,そちらを読んでください.ついでにエルミート行列や実交代行列などの固有値がどうなるか考えて(調べて)みてください.

5. 二次形式の定義,標準形とは何か,標準形への変形の仕方などを教科書・演習書・冬学期まとめ付録 III などを読んで自習してください.
   結局直交行列による対角化を行うことになるわけですが,答えの確認のために固有値と固有ベクトルを書いておきます.ただし固有ベクトルは規格化されています.

固有値 0 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

固有値 $\dfrac{9 \pm \sqrt{41}}{2}$ に対する固有ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{82 \mp 6\sqrt{41}}} \begin{pmatrix} -3 \pm \sqrt{41} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ （複合同順）