数学 1A の講義まとめ 第一回 10 月 10 日

ほとんど試験には関係ないと思われる講義まとめプリント。一応、今学期はこれを作るつもりだから、講義に出たくない人は参考にしてくれれば…. 今回も、教科書通りに講義をしてくれました。しかし、このようなプリントを作ってみると、先生のオリジナルな部分が意外に多く感じました。次回以降、3 章の終わったあとは、6 章に行くそうです。

1 今回の教科書

§3.5 広義積分のはじめから定理 3.16 まで
ただし、
定理 3.13 の詳しい証明、
定理 3.14 と 3.16 は教科書と違う証明方法でした。（下に書きます。）
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$ の値の求め方はやりませんでした。

2 高山先生ののオリジナルな部分

2.1 定理 3.13(広義積分に関するコーシーの判定法) の証明

f を $(a, b]$ 上の連続関数とする.
$\int_{\to a}^{b} f dx$ が収束する.
$\Leftrightarrow \lim_{x \to a+0} F(x)$ が存在する.
$\Leftrightarrow$ [*1] $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $s.t.$ $\forall x$, $\forall t \in (a, b]$
$a < x < t < a + \delta \Rightarrow |F(t) - F(x)| < \epsilon$
ここで、$|F(t) - F(x)| < \epsilon \Leftrightarrow |\int_t^b f dx - \int_x^b f dx| = |\int_x^t f dx| < \epsilon$ より証明終わり。

2.2 定理 3.14 の証明

f を $(a, b]$ 上の連続関数とする.

(1) 仮定　次を満たす $c \in (a, b]$ と関数 g[*2]が存在するとする。
  i. g は　$(a, c]$ 上連続.
  ii. $\int_{\to a}^{c} g dx$ は収束.

[*1] 定理 1.15' より
[*2] このような関数 g を優越関数という。

iii. $|f(x)| \leq g(x) \quad (\forall x \in (a, c])$

このとき、$\displaystyle\int_{\to a}^{b} f dx$ は絶対収束する.

(2) (次数による判定法)

$a < \exists c \leq b,\ \exists M > 0,\ 0 < \exists p < 1 \quad (M, p$ は実定数.$)\ s.t.\ |f(x)| \leq \dfrac{M}{(x-a)^p}$

$$\Longrightarrow \int_{\to a}^{b} f dx \text{ は絶対収束する.}$$

$\because$

1. ii. より、$\forall \epsilon > 0\ , \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad a < x < t < a + \delta (\leq c)$
   $\Rightarrow |\displaystyle\int_{x}^{t} g dx| < \epsilon$
   このとき、iii. $\quad \displaystyle\int_{x}^{t} |f| dx \leq \int_{x}^{t} g dx < \epsilon$
   よって定理 3.13 より絶対収束する。
2. $g(x) = \dfrac{M}{(x-a)^p}$ は、(1) の条件を満たす。
   ((a) は明らか。 (b) は例 3.19 とおなじ。 (c) は仮定より明らか。)

2.3 定理 3.16 の証明

$f(x)$ を $[a, +\infty)$ 上の関数とする。

(1) 仮定　次を満たす $c \in [a, +\infty)$ と関数 g が存在するとする。

i. g は $[c, +\infty)$ 上連続.

ii. $\int_{c}^{\infty} g dx$ は収束.

iii. $|f(x)| \leq g(x) \quad (\forall x \in [c, \infty)$

このとき、$\displaystyle\int_{a}^{\infty} f dx$ は絶対収束する.

(2) (次数による判定法)

$a \leq \exists c < \infty,\ \exists M > 0,\ \exists w > 1 \quad (M, q$ は実定数.$)\ s.t.\ |f(x)| \leq \dfrac{M}{x^q}\ , \forall \in [c, \infty)$

$$\Longrightarrow \int_{a}^{\infty} f dx \text{ は絶対収束する.}$$

証明は 3.14 のものと同様。(p と q が異なるだけ。)