2006　解答

問題 1
(1)$f(x)=\frac{2}{1-x}-1$ だから、$n=1,2,\cdots$ のとき $f^{(n)}(x)=\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$
(2)$f(x)=1+2(x+x^2+\cdots+x^k+\cdots+x^{n-1}+\frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}}x^n)$ となる $\theta\in(0,1)$ が存在する。(剰余項 $R_n=\frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}}x^n$)

問題 2
(1) 任意の $\varepsilon>0$ に対し、$n\geqq N$ ならば常に $\mid a_n-\alpha\mid<\varepsilon$ となるような自然数 N が存在すること。
(2)$\{a_n\}$ が収束するならば、任意の $\frac{\varepsilon}{2}>0$ に対し、$n\geqq N$ ならば常に
$\mid a_n-\alpha\mid<\frac{\varepsilon}{2}$ となるような自然数 N が存在する。すなわち $n\geqq N$ ならば常に $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$ だから、(任意の ε に対し)$m\geqq N,n\geqq N$ ならば常に $\mid a_m-a_n\mid<(\alpha+\frac{\varepsilon}{2})-(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})=\varepsilon$. ゆえに $\{a_n\}$ はコーシー列。
(3)$\{a_n\}$ が収束しないと仮定する。すなわち $\{a_n\}$ はどんな α にも収束しないから、任意の α に対し $\varepsilon>0$ が存在し、任意の N に対し、$\mid a_n-\alpha{\geqq}\varepsilon$ となる $n\geqq N$ が存在する。

　α は任意だから、N 以上の自然数 m を一つ選んで、$\alpha=a_m$ とする。このとき、$\varepsilon>0$ が存在し、任意の N に対し $\mid a_n-a_m\mid{\geqq}\varepsilon$ となる $n\geqq N,m\geqq N$ が存在する。ゆえに $\{a_n\}$ はコーシー列ではない。よって対偶が示されたから題意は示された。

問題 3
(1) 略 (教科書 124 ページの図 3-14)
(2)$\frac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta$ より
$\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}=a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ だから、求める長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4a\int_0^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a$$

問題 4
(1) 任意の $\varepsilon>0$ に対し、$|x-a|<\delta$ ならば常に $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ となるような $\delta>0$ が存在すること。
(2) ある周期 $T>T_0$ が存在して、T が T_0 の整数倍でないと仮定する。このとき、任意の x および整数 n に対し $f(x+T)=f(x+nT_0)(=f(x))$ が成立する。いま $n=\left[\frac{T}{T_0}\right]$([ ] はガウス記号) とおくと、任意の x に対し
$f(x+T)=f(x+\left[\frac{T}{T_0}\right]T_0)\Leftrightarrow f(x+(T-\left[\frac{T}{T_0}\right]T_0))=f(x)$
(変数変換 $x\mapsto x-\left[\frac{T}{T_0}\right]T_0$ による) が成り立つ。

　ここで T は T_0 の整数倍ではないから $\frac{T}{T_0}-1<\left[\frac{T}{T_0}\right]<\frac{T}{T_0}$. よって

$0 < T - \left[\frac{T}{T_0}\right] T_0 < T_0$ だから、$f(x)$ は T_0 より小さい正の周期 $T - \left[\frac{T}{T_0}\right] T_0$ をもつ。これは条件に反する。

(3)$f(x)$ の正の周期のうちで最小のものが存在しないと仮定する。このとき $f(x)$ の周期の一つを a_0 とすると、$f(x)$ は a_0 より小さい正の周期を無限個もつから、それらを大きい順に $a_1, a_2, \cdots$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。このとき、$\{a_n\}$ は下に有界 ($a_n > 0$ より) な狭義単調減少数列だから、ある $\alpha \geqq 0$ に収束する。

このとき $\alpha = 0$ に限ることを示す。$\alpha > 0$ と仮定すると、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$n \geqq N$ ならば $a_n - \alpha < \varepsilon$ となるような自然数 N が存在するから、$\varepsilon = \alpha (> 0)$ とすると、そのような N に対し $\alpha < a_N < 2\alpha, \alpha < a_{N+1} < 2\alpha$ および $a_N > a_{N+1}$ より $0 < a_N - a_{N+1} < \alpha \cdots$ ① が成り立つ。ここで a_N, a_{N+1} は $f(x)$ の正の周期だから、任意の x に対し $f(x+a_N) = f(x+a_{N+1}) (= f(x))$ が成り立つ。変数変換 $x \mapsto x - a_{N+1}$ により $f(x + (a_N - a_{N+1})) = f(x)$ を得る。これが任意の x について成り立つことと①より、$a_N - a_{N+1}$ は $f(x)$ の α より小さい正の周期である。これは $\{a_n\}$ の下限が α であることに矛盾する。よって $\alpha = 0$、すなわち $\{a_n\}$ は 0 に収束するから、

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$n \geqq N$ ならば常に $0 < a_n < \varepsilon$ となるような自然数 N が存在する $\cdots (*)$

また、$f(x)$ は定数でない連続関数だから、$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2 (y_1 \neq y_2)$ となるような x_1, x_2 が存在する。とくに、$f(x)$ が $x = x_2$ で連続であることから、

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$n \geqq N$ ならば常に $|f(x) - y_2| < \varepsilon$ となるような $\delta > 0$ が存在する $\cdots (**)$

$(**)$ で $\varepsilon = |y_2 - y_1|$ とおき、これに対応する δ を $= \delta_1$ とおく。この $\delta_1 > 0$ に対し、$(*)$ で $\varepsilon = \delta_1$ とおくと、$0 < a_n < \delta_1$ を満たす a_n が存在することから、$f(x)$ は $0 < T < \delta_1$ を満たす周期 T をもつ。このとき $\frac{\delta_1}{T} > 1$ と $\frac{x_2 - x_1}{T} - 1 < \left[\frac{x_2 - x_1}{T}\right] \leqq \frac{x_2 - x_1}{T}$ より、
$x_2 - \delta_1 < x_1 + \left[\frac{x_2 - x_1}{T}\right] T < x_2 + \delta_1 \left(\Leftrightarrow \left|\left(x_1 + \left[\frac{x_2 - x_1}{T}\right] T\right) - x_2\right| < \delta_1\right)$
が成り立つ。T は周期だから $f(x_1 + \left[\frac{x_2 - x_1}{T}\right] T) = f(x_1) = y_1$ であり、
$\left|f(x_1 + \left[\frac{x_2 - x_1}{T}\right] T) - y_2\right| = |y_1 - y_2|$ となるが、これは $(**)$ に反する。ゆえに題意は示された。