数学 II　期末試験問題　2004年9月1日(水) IV限　　担当：加藤晃史

※ 試験時間 90 分. 解答用紙 (両面) 2 枚、計算用紙 1 枚
※ ノート・参考書などの持ち込み不可
※ 特にことわりのない限り考え方や計算の途中経過等も解答用紙に書くこと

$\boxed{1}$　n を 2 以上の整数とする。n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = i + j - 2$ で定める。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-2 \end{pmatrix}$$

とする。行列 A の階数を求めよ。

$\boxed{2}$　x をある実数とし、行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & x & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) $\det A$ を x を用いて表せ。
(2) $\det A$ の絶対値が 1 になるような実数 x をすべて求めよ。また、求めた x の値（もし複数個あれば、そのうちの任意 の 1 つでよい）について、A の逆行列を計算せよ。

$\boxed{3}$　次の行列 A について、以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -6 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -7 & -8 & -4 \\ 3 & 6 & -1 & 4 & 6 & 3 \\ -4 & -8 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A に行基本変形を何回か行って、被約行階段行列 (reduced row echelon form) を求めよ。
(2) $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6)$ に関する斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解をすべて求めよ。
(3) 次に、A を拡大係数行列とする連立一次方程式を考えよう。すなわち A を

$$A = (B\,|\,\boldsymbol{c}), \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & -7 & -8 \\ 3 & 6 & -1 & 4 & 6 \\ -4 & -8 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と区分けし、$\boldsymbol{y} = {}^t(y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5)$ に関する連立方程式 $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ を考える。この方程式は

(i) 解を持たない。 (ii) ただ一つの解を持つ。 (iii) パラメータを含む解を持つ。

のいずれか？理由を付けて答えよ。

$\boxed{4}$　V を K 上のベクトル空間とし、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \in V$ は線型独立であるとする。いま、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in V$ を

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4), \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{v}_1$$

と定めたとき、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は線型独立か？それとも線型従属か？結論をまず述べ、次にその証明を与えよ。

数学 II　期末試験問題　2005年9月5日 (月) IV 限　　担当：加藤晃史

※ 試験時間 90 分、解答用紙 (両面) 2 枚、計算用紙 1 枚
※ ノート・参考書などの持ち込み不可
※ 特にことわりのない限り考え方や計算の途中経過等も解答用紙に書くこと

1　次の行列について、正則ならばその逆行列を、正則でなければそのランクを求めよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & -3 \\ 6 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2　$x_1, \cdots, x_5$ を未知数とする連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 2x_4 + 23x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_5 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 18x_5 = k \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 4 \end{cases}$$

を考える。解が存在するように定数 k を定めよ。またそのときの一般解を求めよ。

3　n を 2 以上の整数とする。n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = i - j$ で定める。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1) \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -(n-2) \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & -(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とする。行列 A の階数を求めよ。

4　整数 $n = 2, 3, 4, \ldots$ に対し、x の多項式 $f_n(x)$ を n 次正方行列の行列式

$$f_n(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & x & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

で定義する。

(1)　$f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ をそれぞれ求めよ。

(2)　$f_n(x)$ の形を予想し、それを証明せよ。

5　A を n 次正方行列とする。任意の対角行列 B に対し $AB = BA$ が成立するならば、A 自身が対角行列であることを証明せよ。