数学IIテスト（小木曽、90分、持込無）

注意.　解答用紙（両面使用）1枚、計算用紙1枚．まず解答用紙に名前と学生証番号を正しく書いて下さい。その後、解答を始めて下さい。解答順序は小問毎に自由です。**1** は答に自信があれば答だけでもよいです。逆に **2** は答に至った根拠もていねいに書いてください。

1. k を実数とする。4 × 4 行列 A_k を次で定める：

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{例えば} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A_2^2 (A_2 の2乗）を求めよ。
(2) A_2 の逆行列 A_2^{-1} を求めよ。
(3) A_k の行列式 $\det A_k$ を求めよ。（答は k の式で。）
(4) A_k のランク $\mathrm{rank} A_k$ を k で場合分けして求めよ。

2. a, b, c, p, q を実数とする。連立方程式

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= a \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= b \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + qx_4 &= c \end{aligned}$$

の解 ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (^{t} は転置を表す）全体からなる集合を L とする。（解は実数の範囲で考える。）今、L が $\mathbf{R}^4$ の2次元線形部分空間であったという。このとき、以下の問に答えよ。

(1) L が線形部分空間になることから a, b, c の値を定めよ。
(2) 更に L が2次元になることから p, q の値を定めよ。
(3) L の基底を1組求めよ。
(4) p, q は(2)で求めた数とする。$y_1, \cdots, y_4$ の連立方程式

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_4 &= \alpha \\ y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 &= \beta \\ 3y_1 + 2y_2 + py_3 + qy_4 &= \gamma \end{aligned}$$

が解をもつために実数 α, β, γ がみたすべき必要十分条件を α, β, γ の等式の形で求めよ。

3. 線形空間 V と $f + g = id_V$（つまり $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ $(\forall \mathbf{x} \in V)$）かつ $f \circ g = 0$（つまり $f(g(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ $(\forall \mathbf{x} \in V)$）をみたす線形写像 $f : V \to V, g : V \to V$ が与えられている。次を示せ。（V は有限次元と仮定して解いてもよい。）

(1) V の任意の元は $\mathrm{Im}\, f$ の元と $\mathrm{Im}\, g$ の元の和の形に一意的に書ける。
(2) V の任意の元は $\mathrm{Ker}\, f$ の元と $\mathrm{Ker}\, g$ の元の和の形に一意的に書ける。

以上です。

【解答】

1.

(1) $A_2^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $A_2^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\det A_k = k^4 - 6k^2 + 8k - 3 = (k+3)(k-1)^3$

(4) $k \neq -3,1$ のとき　逆行列が存在するので rank $A_k = 4$

$k = 1$ のとき、A のすべての行が同じになるので、rank $A_k = 1$

$k = -3$ のとき、

A_3 をランク標準形にすると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので、rank $A_k = 3$

※別解

A_k をランク標準形にすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & -(k-1)(k+3) \end{pmatrix}$$

よって　$k \neq -3,1$ のとき　rank $A_k = 4$

$k = -3$ のとき　rank $A_k = 3$

$k = 1$ のとき　rank $A_k = 1$

2.

(1) 線形部分空間になる $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0}$ も解になる。($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$)

よって $a = b = c = 0$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & p & q & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ランク標準形にすると}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p-7 & q+1 & 0 \end{pmatrix}$

L が 2 次元であることから、上の行列の rank は 2 である必要がある。

よって　$p = 7, q = -1$

(3) 与えられた方程式は結局

$$x_1 + 2x_3 = 0$$
$$2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

となる。これを解くと

$$x_1 = -2x_3 \text{、} x_4 = 2x_2 + x_3$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって求める基底は$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$である。

(4) (2)と同じ要領でランク標準形にすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & \alpha \\ 1 & -2 & 1 & 1 & \beta \\ 3 & 2 & 7 & -1 & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ランク標準形にすると}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 4 & 2 & -2 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix}$$

よって与方程式が解を持つ条件は$2\alpha+\beta-\gamma=0$である。

解答作成：はる