# 数学Ⅱ演習第５回（行列式編と補足）略解＋$\alpha$

問１～１７は第４回。以下は新規参入問題と４－２、６の補足説明
※２３は未解決
１８．
※行列式の計算のポイント
基本変形によって計算しやすくできないか考えよう。（１）のように掃き出しと同じ要領で変形を繰り返すと行くことがある。（２）は掃き出してもあまり意味がなさそうなので、3次の行列式の定義に基づいて計算すればよいが、下記のように書き下すと計算ミスしにくいかと思う。（３）は直接掃き出しを試みてもあんまりきれいにならない。そこで以下では第３列を他の列から引きつぎに第１行を他の列から引いて扱う数を小さくしてから掃き出しを行った。
下記の計算はあくまで一例なのでこれにこだわる必要はない。
（１）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3(-6\cdot 1 - 4\cdot 7) = -102$$

（２）

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ -b & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -c \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} -b & -1 \\ 3 & -c \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -b & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4c+2) - a(bc+3) + 3(-2b-12)$$

$$= -3a - 6b - 8c - abc - 32$$

（３）

$$\begin{vmatrix} 102 & 103 & 105 \\ 103 & 104 & 105 \\ 104 & 102 & 101 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 105 \\ -2 & -1 & 105 \\ 3 & 1 & 101 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -2 & 105 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 105 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 105 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 105 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -311$$

１９．教科書Ｐ７９定理２．１を見よ。
２０．教科書Ｐ８３の２．８を見よ。これにおいてｍ＝ｎの場合が本問である

２１．
（１）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2+(b+a)a & c^2+(c+a)a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\left(\begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+a & c+a \\ (b+a)a & (c+a)a \end{vmatrix}\right)$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

（２）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

（３）

a+b+c＝s とおく。まず第 1 列に第 2 列と第 3 列を加える。つぎに２ｓをくくりだして、第 1 行を第 2 行と第 3 行から引く。

$$\begin{vmatrix} s+a & b & c \\ a & s+b & c \\ a & b & s+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2s & b & c \\ 2s & s+b & c \\ 2s & b & s+c \end{vmatrix}$$

$$= 2s\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & s+b & c \\ 1 & b & s+c \end{vmatrix} = 2s\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix}$$

$$= 2s^3 = 2(a+b+c)^3$$

２２.

ポイント：問２０を使える形に変形する。det AB=det A・det B であることを利用する。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$= |I||I| \cdot |A||D-CA^{-1}B| = |A||D-CA^{-1}B|$$

２３.A が正則なら２２からすぐ出る。しかし A が非正則のときはどうすればよいのか･･･。

２４.問２８－１の３次版。まず２８－１からやってみよう。この問いは教科書Ｐ８３の２.８（問２０よりもう少し強い主張）を使う教科書１手目ができても２手目がなかなか思いつかないかもしれない。実はここで問題文中の「ヒント」を使うのである

以下ωは１の３乗根のうち、１でないもののうちの一つとする。

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B+C & B & C \\ C+A+B & A & B \\ B+C+A & C & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B+C & B & C \\ O & A-B & B-C \\ O & C-B & A-C \end{vmatrix} = |A+B+C|\begin{vmatrix} A-B & B-C \\ C-B & A-C \end{vmatrix}$$

ここで $\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1$ であることに着目すれば次のような変形ができる。

$$\begin{vmatrix} A-B & B-C \\ C-B & A-C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B-\omega(B-C) & B-C \\ C-B-\omega(A-C) & A-C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+\omega^2 B+\omega C & B-C \\ -\omega A-B-\omega^2 C & A-C \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A+\omega^2 B+\omega C & B-C \\ -\omega A-B-\omega^2 C+\omega(A+\omega^2 B+\omega C) & A-C+\omega(B-C) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A+\omega^2 B+\omega C & B-C \\ O & A+\omega B+\omega^2 C \end{vmatrix} = |A+\omega^2 B+\omega C||A+\omega B+\omega^2 C|$$

よって次式が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix} = |A+B+C||A+\omega B+\omega^2 C||A+\omega^2 B+\omega C|$$

２５．省略。4次の行列式は４！個の項の和なので、たすきがけでは計算できない。

２６．教科書Ｐ８４系２．９（ロ）。定理２．８（問20）をどのように使って、対角成分を上から１つずつ外に出してやればいい。

２７．行列式の線形性と交代性から明らか

２８．教科書第３章末問題３とほぼ一緒。
ポイント：基本変形を行って問２０を使える形に変形する。
２８－１　まず第ｎ＋１列～第２ｎ列をまとめて第１列から第ｎ列までに加える。次に第１行～第ｎ行を第ｎ＋１行～第２ｎ行から引く。
２８－２　まず第ｎ＋１列～第２ｎ列に－ｉをかけて、まとめて第１列から第ｎ列までに加える。次に第１行～第ｎ行にｉをかけて第ｎ＋１行～第２ｎ行に加える。

２９．第２，３，４行から第１行を引く。

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & x-2 & x-3 \\ x+1 & x & x-1 & x-2 \\ x+2 & x+1 & x & x-1 \\ x+3 & x+2 & x+1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x-1 & x-2 & x-3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x-1 & x-2 & x-3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

補足

４－２．行列式を用いた別解

$\left|{}^t A\right| = |A| \neq 0, \overline{A}\overline{A}^{-1} = I$

転置行列も、複素共役をとった行列も正則だから、随伴行列も正則。

６．求めるベクトルを（a,b,c）などとおいて直交条件と長さ１の条件からパラメータを用いて（a,b,c）を（２次方程式を頑張って解けば）求めることができるが、形が汚いしイメージしにくい。求めるベクトルで表わされる点が、（１，２，３）を法線ベクトルとする単位円周上を動くと想像できれば第４回略解にあげたやり方が自然ではないかと思われる。