数学Ⅱ（理科１類）夏学期期末試験サポートプリント

過去問について

小木曽先生の問題は１だけ範囲内。

加藤先生の問題は０４，０５ともにすべて範囲内（０４の大問４で「V を K 上のベクトル空間とし…」はとくに気にしなくてよい。）

宮岡先生の問題（本試、追試ともに）最後の問題は範囲外。

川又先生の問題について。２は範囲外。３は演習第５回２４番と同様の手法で解ける。１は最後の授業で扱った内容（下記参照）。

１学期授業最終回（７月１７日）のおさらい

・写像とは？（教科書 P1、P94-95 参照）

・置換はｎ文字の集合から自身への写像

・連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ （A は $m\times n$ 行列、x は n 次元ベクトル、b は m 次元ベクトル）を解くとは n 次元ベクトル空間（n 次元ベクトル全体のなす集合）から m 次元ベクトル空間への写像 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を考えて、集合 $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}\}$ を求めることと解釈される。

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解の集合 $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}\}$ を f の核と呼ぶ。

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の集合はどうなるか。

（ｉ）ϕ（空集合）

（ⅱ）$\boldsymbol{a}$ が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の１つの解とであるとき、解の集合は $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}\}$

計算例　加藤先生の 2005 年の過去問大問２

左基本変形を繰り返すことで結局与えられた方程式は次のようになる

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2k-16 \\ 2k-14 \\ -k+8 \\ -3k+24 \end{pmatrix}$$

（ｉ）$k\neq 8$ のとき解なし

（ⅱ）$k=8$ のとき、１つの解は $x_1=x_2=x_4=x_5=0, x_3=2$ である。ところで

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解は s,t を任意の実数として

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

ゆえに一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

・行列の積と合成写像の対応

・複素数と行列の対応、複素数の積は回転と拡大縮小を表す写像

試験範囲

中間試験の範囲＋行列式（教科書第３章)、写像（上記１学期最後の授業）

川又先生の２００１年度過去問の略解

1a. $\det A = t^3 + 15 \neq 0$ より $t \neq -\sqrt[3]{15}$

1b. Cramer はクラメル（あるいはクラメール）のこと。

$$x = \frac{1}{t^3+15}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t+1 & -1 \\ -1 & 4 & t-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{t^3+15}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & t-3 & -3 \\ -1 & 6 & t \end{vmatrix} = \frac{t^2-3t+18}{t^3+15}$$

$$y = \frac{1}{t^3+15}\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{t^3+15}\begin{vmatrix} t-1 & 0 & t-2 \\ 0 & 0 & 2t-3 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = \frac{(2t-3)(t-1)}{t^3+15}$$

$$z = \frac{1}{t^3+15}\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t+1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{t^3+15}\begin{vmatrix} t & 4t+2 & -t+1 \\ 2 & t+9 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(t-1)(t+9)}{t^3+15}$$

1c. $t=-\sqrt[3]{15}$ のとき全単射でない。以下 $t=-\sqrt[3]{15}$ とする。

$$\begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t+1 & -1 \\ -1 & 4 & t-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t+2 & t+3 & 0 \\ 2 & t+1 & -1 \\ 0 & t+9 & 2t-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから k を任意の実数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(t+3)(t+9) \\ (t+2)(2t-3) \\ -(t+2)(t+9) \end{pmatrix}k$$

2. 範囲外

3. 演習第５回２４番と方針は同じ。答えは $\left|C+D+E\right|\left|-\omega C-D-\omega^2 E\right|\left|\omega^2 C+D+\omega E\right|$

ただし ω は１の立方根で虚数であるものの１つ。