数学Ⅱ演習第６回（７月９日実施分）略解

問１～１７は第４回、問１８～２９は第５回。

３２、３３、３５、４０は別紙。

以下で$\Sigma \mathrm{sgn}(\sigma)\cdots$ において和はσ全体についてとるとする。

３０．A＝(a_{ij})とすると、$a_{ij}=\overline{a_{ji}}$ より

$$\begin{aligned}\det A &= \sum \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum \mathrm{sgn}(\sigma) \overline{a_{\sigma(1)1}}\,\overline{a_{\sigma(2)2}} \cdots \overline{a_{\sigma(n)n}} = \overline{\sum \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}} \\ &= \overline{\det A}\end{aligned}$$

よって$\det A$は実数である。

※determinant の定義式

行でみた場合（ヨコ割りの視点） $\det A = \sum \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

列でみた場合（タテ割りの視点） $\det A = \sum \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$

３１．問題がおかしい。

３４．$\{1,2,\cdots n\}$の置換をσとすれば、すべての置換の符号の和$\Sigma \mathrm{sgn}(\sigma)$が０になることと符号が１の置換と符号が－１の置換の個数が等しいこととは同値である。ところで、すべての成分が１であるｎ次正方行列の行列式$\Sigma \mathrm{sgn}(\sigma)$(n 個の１の積) は明らかに０である。

３６．A＝(a_{ij})を正則な n 次正方行列とする。ここで a_{ij} はすべて整数であるとする。またA^{-1}＝(b_{ij})とおく。

detA＝±１ならば、$\tilde{A}$を余因子行列として

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}$$

と表されるから

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A} = \pm \det A_{ji}$$

となって明らかにA^{-1}の成分 bij はすべて整数である。ここでA_{ji}は A から j 行目と i 列目を取り去った行列である。余因子行列については教科書 PP８７－８８を参照せよ。

逆にすべての b_{ij} が整数ならば $\det A^{-1}$は０でない整数である。detA も整数だからもし｜detA｜≠１なら｜detA｜>1 であって｜$\det A^{-1}$｜＝1/｜detA｜<1。矛盾が導かれたので｜detA｜=１である。証明終わり。

３７．

（１）

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\3&4&6&8\\4&6&9&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&2&3\\3&1&3&5\\4&2&5&6\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&5\\2&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2$$

（２）

$$\begin{vmatrix}102&102&102&102\\103&105&107&109\\101&102&103&104\\102&102&104&106\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102&0&0&0\\103&2&4&6\\101&1&2&3\\102&0&2&4\end{vmatrix}=102\cdot\begin{vmatrix}2&4&6\\1&2&3\\0&2&4\end{vmatrix}=102\cdot2\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\0&2&4\end{vmatrix}=0$$

３８．$|A||A^{-1}|=|AA^{-1}|=1$から明らか。

３９．背理法。A が正則ならば AB＝０に左から A^{-1} をかけて B=０を得る。