数学II 演習 第6回 (7月9日実施分) 解答例 (32, 33, 35, 40)

32.

$$|A| = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & & & O \\ 0 & a & b & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}}_{n} \xrightarrow{\text{第1列に関して展開}} = a \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ 0 & & & a \end{vmatrix}}_{n-1} + (-1)^{n+1} b \underbrace{\begin{vmatrix} b & & & 0 \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a & b \end{vmatrix}}_{n-1}$$

$$= a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1}$$

この変形は「三角行列の行列式は対角成分の積」を使った。教科書P84系2.9ロ)

$$= \underline{\underline{a^n - (-b)^n}}$$

33. $d_n = |A|$ とおくと、$n \geq 4$ のとき、第1行に関して展開

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & & & O \\ a & 1+a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+a & 1 \\ O & & & a & 1+a \end{vmatrix}}_{n} = (1+a) \underbrace{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & a & 1+a \end{vmatrix}}_{n-1} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & 1 & & & 0 \\ 0 & 1+a & \ddots & & \\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & a & 1+a \end{vmatrix}}_{n-1}$$

$$= (1+a) \underbrace{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & a & 1+a \end{vmatrix}}_{n-1} - a \underbrace{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & a & 1+a \end{vmatrix}}_{n-2}$$

よって、$d_n = (1+a)d_{n-1} - a d_{n-2}$ ―☆

$d_2 = (1+a)^2 - a = 1 + a + a^2$, $d_3 = (1+a)\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ a & 1+a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1+a \end{vmatrix}$

$= 1 + a + a^2 + a^3$

となるから、$d_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$ と予想できる。これは☆を満たす。

よって、$\underline{\underline{|A| = \sum_{k=0}^{n} a^k}}$

(☆を実際に解いても出来なくはないが、aの値で場合分けしたり、計算が面倒だったりする。答えが簡単に予想できるので、この書き方が楽。)

35. $a_{ij} = {}^t v_i \cdot v_j$ より、

※この問で使う事項

。$\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (P82, 定理2.7)

。$\det {}^t A = \det A$ (P79, 定理2.1)

$$A = \begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ \vdots \\ {}^t v_n \end{pmatrix} (v_1 \cdots v_n)$$

$$= {}^t(v_1 \cdots v_n)(v_1 \cdots v_n)$$

$\det({}^t(v_1 \cdots v_n)) = \det(v_1 \cdots v_n)$ だから、$\det A = \{\det(v_1 \cdots v_n)\}^2$ //

40-1 33で $a=1$ とした場合。$|A| = n+1$

40-2 32で $a=2, b=1$ とした場合。$|A| = 2^n - (-1)^n$

40-3
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

第1行に第2〜n行を加える。

この変形は線形性による。

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

第2〜n行から第1行を引く

以上より、$|A| = n+1$

40-4 $n \geqq 3$ のとき、

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 2 & 0 & 1 & & \\ & 2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 2 & 0 \end{vmatrix}}_{n} = -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 2 & 0 \end{vmatrix}}_{n-1} = -2 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 2 & 0 \end{vmatrix}}_{n-2}$$

$n=2$ のとき、$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$、 $n=3$ のとき $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2|0| = 0$

n が2つ大きくなると -2 倍。n が奇数ならずっと0、偶数なら $(-2)^{\frac{n}{2}}$

すなわち、

$$|A| = \begin{cases} (-2)^{\frac{n}{2}} & (n\text{が偶数}) \\ 0 & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$